CUANTIFICADORES.

Considere las siguientes frases:

1.- Todos los gatos tienen cola.
2.- A algunas personas les gusta la carne cruda.
3.- Todo el mundo tiene un descanso de vez en cuando.

Todas estas frases indican la frecuencia con la cual es cierta alguna cosa. En cálculo de predicados, se utilizan cuantificadores: ***el cuantificador universal*** que indica que algo es cierto para todos los individuos y ***el cuantificador existencial*** que indica que una frase es cierta para algunos individuos.

Sea A una expresión y sea x una variable. Si deseamos indicar que A es verdadero para todos los posibles valores de x, escribiremos $(\forall x)$ A. Aquí $(\forall x)$ se denomina cuantificador universal y A se denomina ámbito (alcance) del cuantificador. El símbolo $\forall$ se lee "para todo".

El cuantificador y la variable ligada que lo sigue debe tratarse como un todo. Los enunciados que contienen frases como "todos", "cada uno", "siempre que", "para cada", "cualquiera", "para todo" suelen indicar un cuantificador universal.

Ejemplo 1.- Expresar "Todo el mundo tiene suerte de vez en cuando" en cálculo de predicados.

Solución definiendo:

B="tiene suerte de vez en cuando" y se denota por

Bx $\leftrightarrow$ x tiene suerte de vez en cuando.

La frase "todo el mundo" indica que esto es cierto para todos los x. $\therefore$

$$(\forall x)\ Bx$$

Ejemplo 2.- Expresar "todos los gatos tienen cola" en cálculo de predicados.

Solución:
Hallar primero el ámbito del cuantificador universal, que es "Si x es un gato, entonces x tiene cola" y se define como

Gx $\leftrightarrow$ x es un gato
Cx $\leftrightarrow$ x tiene cola $\therefore$ $(\forall x)\ Gx \rightarrow Cx$

Problemas:

Demostrar E4 si
1) $(\forall x)$ $(x>0 \rightarrow Ex \lor Ox)$
2) $(\forall x)$ $(Px \rightarrow x>0)$
3) P4
4) $\neg O4$

Demostrar $\neg(1>2)$ si
1) $(\forall x)(\forall y)$ $(x>y \rightarrow \neg(y>x))$
2) $2>1$

Dar una demostración formal para cada uno de los razonamientos siguientes:

Tres más siete es mayor que dos más cinco.
Cada número mayor que dos más cinco no es igual a dos por tres.
Por tanto, tres más siete no es igual a dos por tres.

Cada número que no es igual a cero es mayor que cero o menor que cero.
Seis dividido por dos no es cero y seis dividido por dos no es menor que cero.
Por tanto, seis dividido por dos es mayor que cero.

Un número es par si y solo si es divisible por dos.
Tres por cinco no es par, pero tres más cinco es divisible por dos.
Por tanto, tres por cinco no es divisible por dos pero tres más cinco es par.

Para todo x, x más uno es par o x no es impar. Si uno más tres no es par, entonces tres más uno no es par.
Por tanto, si tres es impar, entonces tres más uno es par.

Tres sumado a cualquier número impar da un número par.
(indicación: Si un número es impar, entonces ese número más tres es par).
Dos más tres es impar.
Si el resultado de sumar tres a dos más tres es par, entonces ocho es par.
Por tanto ocho es par.

Para cada x, si x es un número par, entonces x+2 es par.
Para cada x, si x es un número par, entonces x no es un número impar.
Dos es un número par.
Por tanto, 2+2 no es un número impar.

Para cada y, si y es menor que 9 entonces y es menor que 10.
4+4 es menor que 9.
Por tanto, 4+4 s menor que 10.

Para cada x, si x es mayor que cuatro, entonces x es mayor que tres.
Uno mas uno no es mayor que tres.
Por tanto, uno mas uno no es mayor que cuatro.

Cada número positivo es mayor que cero.
Uno es un número positivo.
Tres es un número positivo.
Por tanto, uno y tres son mayores que cero.