Conjuntos y relaciones

- Introducción
- Propiedades de las relaciones
    - Sobre un conjunto
    - Reflexivas
    - Simétricas y transitivas
- Cerradura
- Relaciones de equivalencia
- Órdenes parciales
- Diagramas de Hasse

Introducción

Conjunto: Cualquier colección de objetos o individuos. Se denota con mayúsculas.

Elemento: Cierto individuo **x** que es parte del conjunto **A.** Se identifican con minúsculas.

Ejemplos:

$$A = \{ 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Operaciones con conjuntos

Axioma de extensionalidad:

Sean A y B dos conjuntos. Entonces A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos miembros. Si A y B son iguales, escribimos $A=B$.

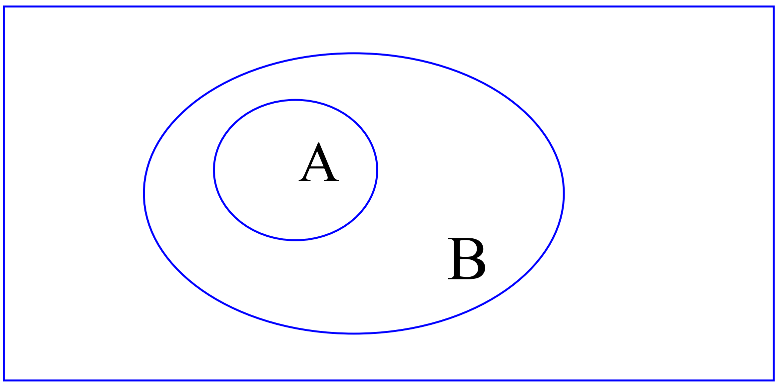
$$(A=B) \equiv (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Definición:

Sea P una propiedad. La extensión de P, escrita $\{x \mid P(x)\}$ se denomina notación de constructor de conjuntos.

Subconjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Al conjunto A se le llama un subconjunto de B si todo elemento de A es también elemento de B. Sin embargo, no todo elemento de B necesita ser un elemento de A. Esto se expresa como $A \subseteq B$



$A \subseteq B$

Subconjuntos propios

A es un subconjunto propio de B si A es un subconjunto de B, pero A no es igual a B. Esto se escribe $A \subset B$

$$(A \subset B) \equiv (A \subseteq B) \,\&\, (A \neq B)$$

Conjunto potencia

Al conjunto de todos los subconjuntos (propios o no) de un conjunto X, denotado P(X) se le llama conjunto potencia.

P. ejem.
Si A = { a, b, c } encontrar todos los subconjuntos propios.

$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a, b, c}

Sólo que {a, b, c} no es subconjunto propio

Cardinalidad de un conjunto

Sea A un conjunto con un número finito de elementos. La cardinalidad de A representada por $|A|$ o $\#A$, es igual al número de elementos en A

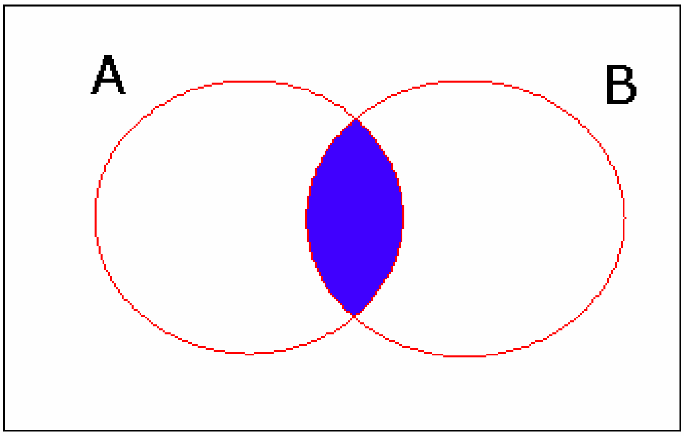
$$(A \subset B) \Rightarrow (|A| < |B|)$$

Intersección

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto $A \cap B$ llamado intersección de A y B es el conjunto que contiene todos los elementos comunes a ambos A y B

$$x \in (A \cap B) \equiv (x \in A) \ \& \ (x \in B)$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \& \ (x \in B \}$$



$A \cap B$

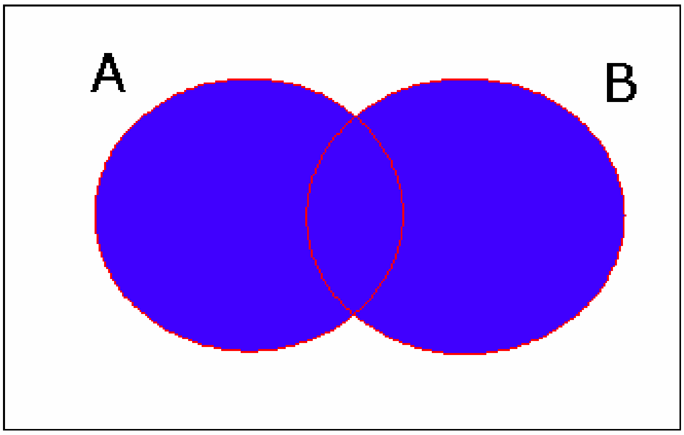
Unión

Sean A y B dos conjuntos.

El conjunto A U B, llamado unión de A y B es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen o bien a A o bien a B.

$$x \in (A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee (x \in B \}$$



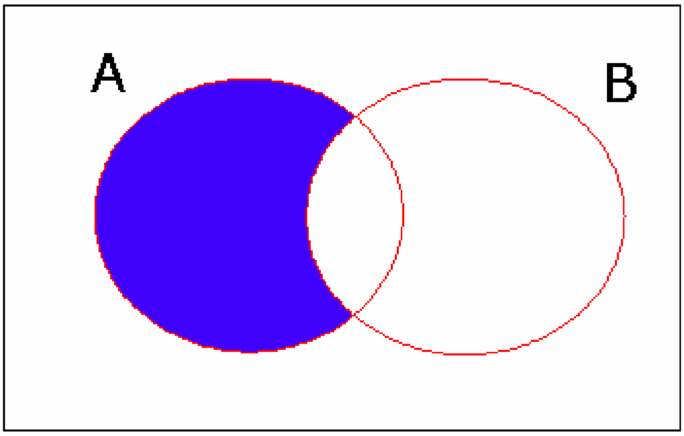
$A \cup B$

Diferencia

Sean A y B dos conjuntos.
El conjunto A-B, llamado diferencia de A y B, es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B

$$x \in (A - B) \equiv (x \in A) \;\&\; (x \notin B)$$

$$A - B = \{ x \mid x \in A \;\&\; (x \notin B \}$$



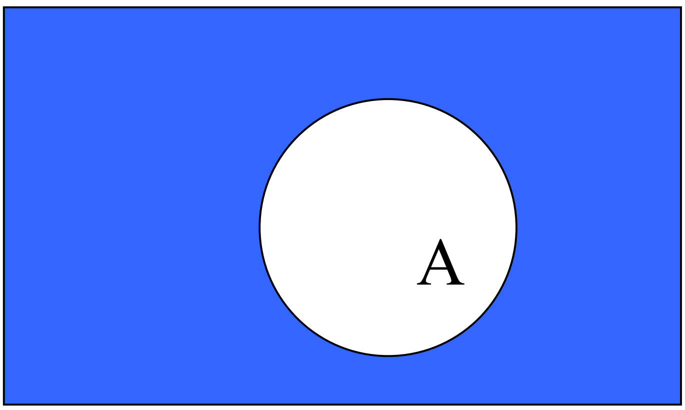
A – B

Complemento

Sean A un conjunto. El complemento de A, se escribe ~A, es el conjunto de todos los elementos que **no** pertenecen a A.

$$x \in \sim A \equiv \neg (x \in A)$$

$$\sim A = \{ x \mid x \notin A \}$$



~A

Tuplas

Tuplas: Son objetos colocados en cierto orden. Se utilizan para organizar datos.

La tupla más común es el par.

Si *(x, y)* es un par, entonces es frecuente limitar *x* a un conjunto de A e *y* a un conjunto de B.

El conjunto de todos los pares posibles que se pueden obtener se llama **producto cartesiano** de A y B.

Producto cartesiano

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto de todos los pares ordenados tal que el primer miembro del par ordenado es un elemento de A y el segundo miembro es un elemento de B, se llama el producto cartesiano de A y B y se escribe A X B.

$$A \times B = \{ (x,y) \mid (x \in A) \,\&\, (y \in B) \}$$

Relaciones

Las relaciones son conjuntos, por lo tanto se puede usar la representación de conjuntos para representar relaciones.

Una relación *n*-aria es un conjunto de *n*-tuplas.

Las relaciones binarias con conjuntos de pares.

Sean A y B dos conjuntos. Una relación de A en B es cualquier conjuntos de pares

(x,y), $x \in A$ e $y \in B$. Si $(x,y) \in R$,

diremos que *x* es *R*-relacionado con *y*.

Para expresar que R es una relación de A en B, escribimos R: A↔ B

Por ejemplo:

El predicado *casado(x, y)* es verdadero cuando *x* e *y* están casados; por lo tanto, se puede definir un conjunto tal que:

M = { (x, y) | casado(x, y) }

Como M es un conjunto de pares, M es una relación.

Representación de Relaciones

Todo predicado define una relación y recíprocamente toda relación R define un predicado.

Si *(x,y)* es un par, puede definirse un predicado P_R para cada relación *R* que es verdadera si $(x,y) \in R$ y falsa en caso contrario.

Esto se expresa como *xRy* y se define

$$xRy \equiv (x,y) \in R$$

Representación de Relaciones en forma tabular

Las relaciones se pueden representar en forma de tablas

	P_1	P_2	P_3
S_1	1	0	1
S_2	0	1	1

Representación de Relaciones en forma matricial

Las tablas están estrechamente relacionadas con las matrices. P. ejem.

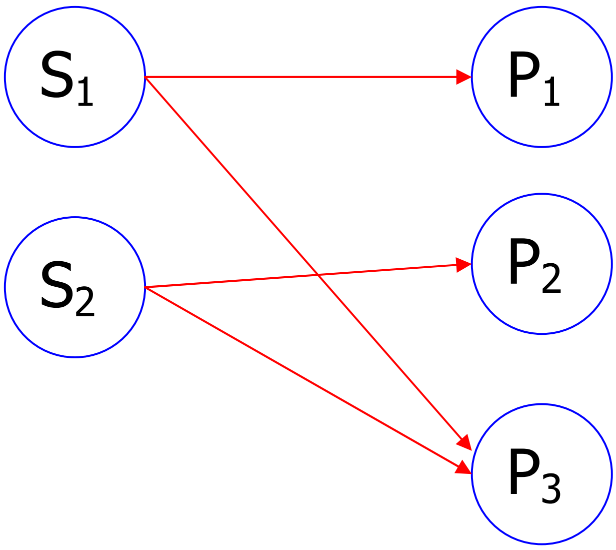
$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si *R* es una relación, se utiliza M_R para denotar la matriz de esta relación

Representación gráfica de Relaciones

Para representar una relación de A en B, se dibuja un círculo para cada elemento de A a la izquierda y un círculo para cada elemento de B a la derecha.

Si el par $x \in A$ e $y \in B$ está en la relación, los círculos correspondientes (nodos) se conectan entre sí mediante líneas rectas (arcos).



P.ejem. Considere la relación ≤ aplicada al conjunto A = { 1, 2, 3, 4 }

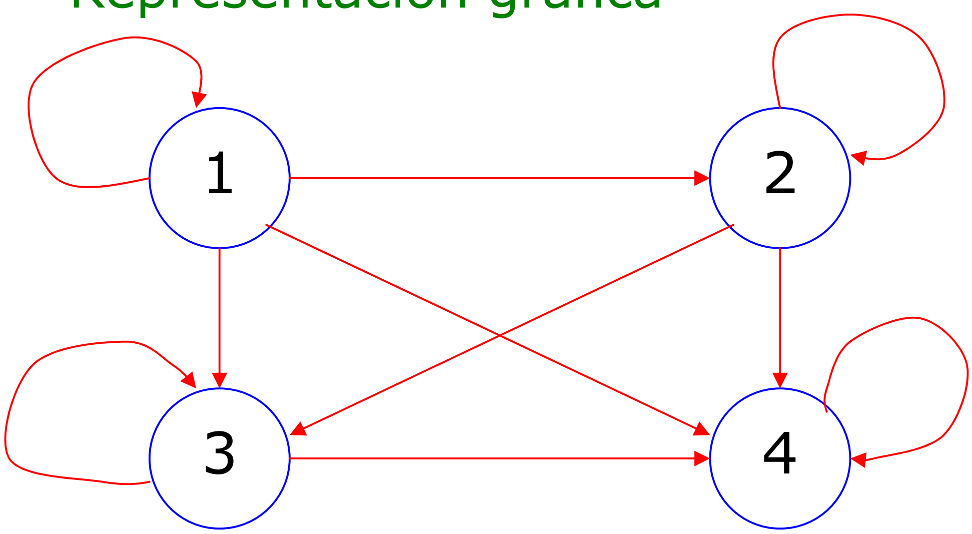
- Representación con tuplas

{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4) }

- Representación matricial

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Representación gráfica

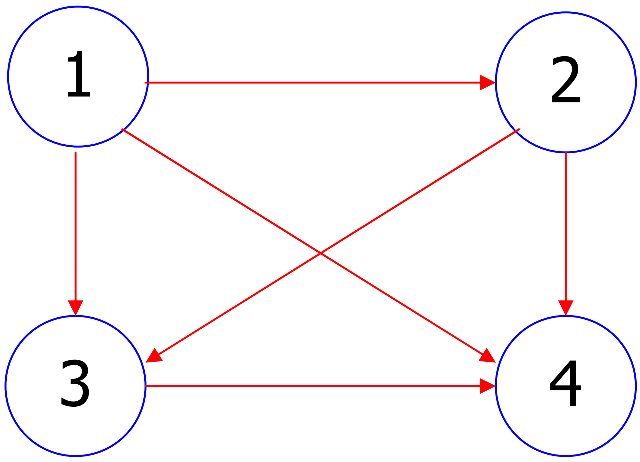


Propiedades de las relaciones

- Reflexividad
- Simetría
- Transitividad

Relaciones sobre un conjunto

Suponga que tiene el conjunto A = { 1, 2 3, 4} y la relación < entre ellos. Esto se puede representar gráficamente como:



Relaciones Reflexivas

Una relación *R* sobre *X* es reflexiva si, para cada $x \in X$, el par (x,x) está en la relación.

$$R \text{ es reflexiva} \equiv \forall\ x\ (xRx)$$

Una relación *R* sobre *X* es **no** reflexiva si, para cada $x \in X$, el par $(x,x) \notin R$. Es decir, no existe $x \in X$ tal que xRx.

- Reflexiva: xRx es verdadera para todo x
- No reflexiva: xRx es falsa para todo x (ninguna x cumple)
- Si xRx es cierta para algunas x y falsa para otras, entonces *R* no es ni reflexiva ni no reflexiva
- En una relación **reflexiva**, en su grafo **todos** los nodos tienen arco a si mismos. Y si **ningún** nodo tiene arco a sí mismo es **no reflexiva**.

Reflexiva		
1	0	1
0	1	0
1	0	1

No reflexiva		
0	0	1
0	0	0
1	1	0

Ninguna		
1	0	1
0	0	0
0	1	1

Relaciones Simétricas

Una relación *R* sobre un conjunto *X* es simétrica si, para todo *x* e *y* perteneciente a *X*, *xRy* implica *yRx*. Por consiguiente,

$$R \text{ es simétrica} \equiv \forall x \forall y (xRy \Rightarrow yRx)$$

La relación = es simétrica, mientras que < no lo es.

P. ejem. La relación hermano es simétrica porque si *x* es hermano de *y*, entonces *y* es hermano de *x*.

- En el grafo de una relación simétrica, todos los arcos son bidireccionales

Relaciones Antisimétricas

Una relación *R* sobre un conjunto *X* es antisimétrica si, para todo $y \neq x$, *xRy* excluye a *yRx*. En otras palabras, si se alcanzan *xRy* e *yRx*, entonces $x = y$. Por consiguiente

R es antisimétrica ≡

$$\forall x \forall y (xRy \,\&\, yRx \Rightarrow y=x)$$

Simétrica

1	0	1
0	1	0
1	0	0

Antisimétrica

0	0	1
0	1	0
0	1	0

Ninguna

1	0	1
0	0	0
1	1	1

P. ejem. La relación "madre de" es antisimétrica porque si *x* es madre de *y*, excluye a *y* es madre de *x*.

- En el grafo de una relación antisimétrica, ningún arco tiene un compañero en dirección opuesta

Relaciones Transitivas

Una relación *R* sobre un conjunto *X* es transitiva si, para todo *x*, *y*, *z* en *X*, siempre que *xRy* e *yRz*, entonces *xRz*. Esto es

R es transitiva ≡

$$\forall x \forall y \forall z\ (xRy \ \&\ yRz \Rightarrow xRz)$$

- Una relación es transitiva si y sólo si **todos** los pares de objetos que pueden ser alcanzados a través de un intermediario pueden **también** ser alcanzados directamente.

P. ejem. La relación < es transitiva

Cerradura

El cierre reflexivo $R^{(r)}$ de una relación R es la relación reflexiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.

$$R^{(r)} = R \cup I_A$$

donde:

I_A : Relación identidad

R : Cualquier relación (no necesariamente reflexiva)

La relación identidad es aquella que contiene todos los (x,x) con $x \in B$

En pocas palabras, se añaden tan pocos elementos (tuplas) como sea posible para convertir R en reflexiva.

El cierre simétrico $R^{(s)}$ de una relación R es la relación simétrica más pequeña que contiene a R como subconjunto.

$$R^{(s)} = R \cup R^{\sim}$$

donde:
$R^{\sim}$: Relación inversa
R : Cualquier relación (no necesariamente simétrica)

En pocas palabras, se añaden tan pocos elementos (tuplas) como sea posible para convertir R en simétrica.

Relaciones Inversas

Si $R: X \leftrightarrow Y$ entonces la relación inversa

$R^{\sim}: X \leftrightarrow Y$ se define como

$$\{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

Por consiguiente $xRy \equiv yR^{\sim}x$

El cierre transitivo R^+ de una relación R es la relación transitiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^m$$

Relaciones de Equivalencia

Una relación R es una relación de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

P. ejem.

La relación de equivalencia más importante es la relación de igualdad.

Tipo de relación	Porque ...
Reflexiva	x=x para todo x
Simétrica	x=y e y=x
Transitiva	x=y e y=z, x=z

Órdenes Parciales

Una relación *R:S↔S* se denomina un *orden parcial débil* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

R se denomina un *orden parcial estricto* si es no reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Conjunto parcialmente ordenado

Un conjunto A junto con un orden parcial R se denomina *conjunto parcialmente ordenado* o un *cpo*. El *cpo(A, R)* es el conjunto A junto con el orden parcial R.

Orden parcial fuerte

El *orden parcial fuerte* asociado con (A,R) se denota por R_1, donde $R_1=R-I_A$ donde I_A es la relación identidad.

Diagramas de Hasse

Sea *(A,R)* un cpo. *El diagrama de Hasse* del cpo (A,R) es el grafo de la reducción transitiva de R_1. En este grafo, existe un arco desde *x* a *y* si y sólo si *x* comprende directamente a *y*.

Ejemplo:
Diagrama de Hasse que muestra la relación subconjunto sobre el conjunto potencia de A={a, b, c}