Relaciones

Las relaciones son conjuntos, por lo tanto se puede usar la representación de conjuntos para representar relaciones.

Una relación *n*-aria es un conjunto de *n*-tuplas.

Las relaciones binarias con conjuntos de pares.

Sean A y B dos conjuntos. Una relación de A en B es cualquier conjuntos de pares

(x,y), x $\in$ A e y $\in$ B. Si (x,y) $\in$ R,

diremos que *x* es *R*-relacionado con *y*.

Para expresar que R es una relación de A en B, escribimos R: A↔ B

Por ejemplo:

El predicado *casado(x, y)* es verdadero cuando *x* e *y* están casados; por lo tanto, se puede definir un conjunto tal que:

M = { (x, y) | casado(x, y) }

Como M es un conjunto de pares, M es una relación.

Representación de Relaciones

Todo predicado define una relación y recíprocamente toda relación R define un predicado.

Si (x,y) es un par, puede definirse un predicado P_R para cada relación R que es verdadera si $(x,y) \in R$ y falsa en caso contrario.

Esto se expresa como xRy y se define

$$xRy \equiv (x,y) \in R$$

Representación de Relaciones en forma tabular

Las relaciones se pueden representar en forma de tablas

	P_1	P_2	P_3
S_1	1	0	1
S_2	0	1	1

Representación de Relaciones en forma matricial

Las tablas están estrechamente relacionadas con las matrices. P. ejem.

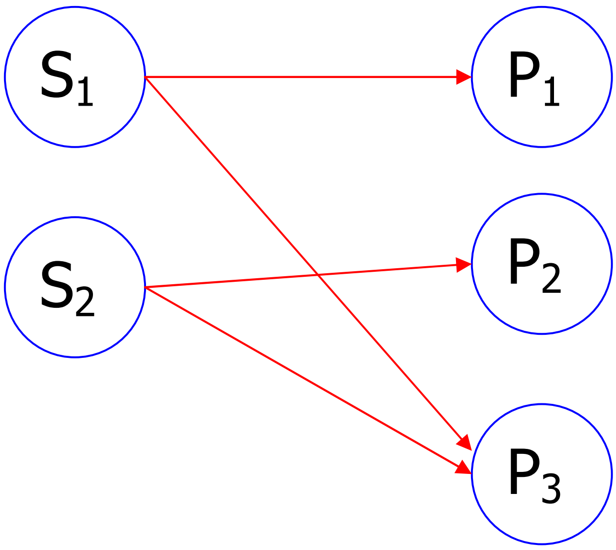
$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si *R* es una relación, se utiliza M_R para denotar la matriz de esta relación

Representación gráfica de Relaciones

Para representar una relación de A en B, se dibuja un círculo para cada elemento de A a la izquierda y un círculo para cada elemento de B a la derecha.

Si el par $x \in A$ e $y \in B$ está en la relación, los círculos correspondientes (nodos) se conectan entre sí mediante líneas rectas (arcos).



P.ejem. Considere la relación ≤ aplicada al conjunto A = { 1, 2, 3, 4 }

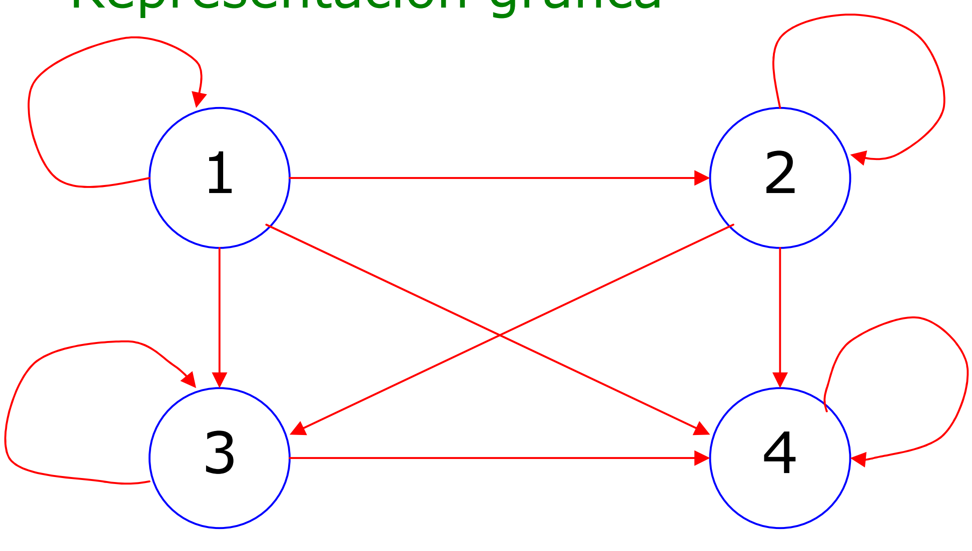
- Representación con tuplas

{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),
(3,3),(3,4),(4,4) }

- Representación matricial

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Representación gráfica

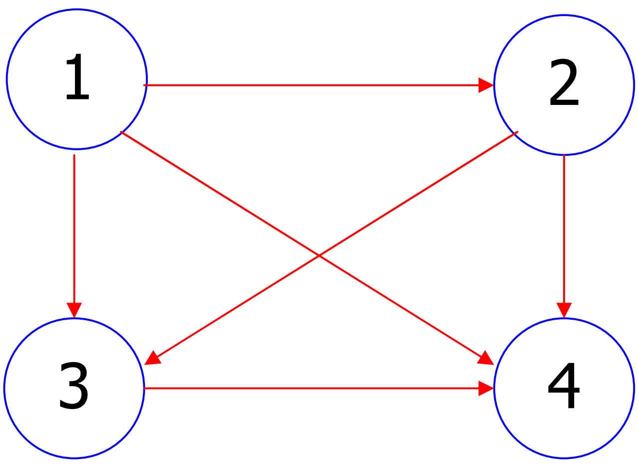


Propiedades de las relaciones

- Reflexividad
- Simetría
- Transitividad

Relaciones sobre un conjunto

Suponga que tiene el conjunto A = { 1, 2 3, 4} y la relación < entre ellos. Esto se puede representar gráficamente como:



Relaciones Reflexivas

Una relación *R* sobre *X* es reflexiva si, para cada $x \in X$, el par *(x,x)* está en la relación.

R es reflexiva ≡ ∀ x (xRx)

Una relación *R* sobre *X* es **no** reflexiva si, para cada $x \in X$, el par $(x,x) \notin R$. Es decir, no existe $x \in X$ tal que *xRx*.

- Reflexiva: *xRx* es verdadera para todo *x*
- No reflexiva: *xRx* es falsa para todo *x* (ninguna *x* cumple)
- Si *xRx* es cierta para algunas *x* y falsa para otras, entonces *R* no es ni reflexiva ni no reflexiva
- En una relación **reflexiva**, en su grafo **todos** los nodos tienen arco a si mismos. Y si **ningún** nodo tiene arco a sí mismo es **no reflexiva**.

Reflexiva

1	0	1
0	1	0
1	0	1

No reflexiva

0	0	1
0	0	0
1	1	0

Ninguna

1	0	1
0	0	0
0	1	1

Relaciones Simétricas

Una relación *R* sobre un conjunto *X* es simétrica si, para todo *x* e *y* perteneciente a *X*, *xRy* implica *yRx*. Por consiguiente,

$$R \text{ es simétrica} \equiv \forall x \forall y\ (xRy \Rightarrow yRx)$$

La relación = es simétrica, mientras que < no lo es.

P. ejem. La relación hermano es simétrica porque si *x* es hermano de *y*, entonces *y* es hermano de *x*.

- En el grafo de una relación simétrica, todos los arcos son bidireccionales

Relaciones Antisimétricas

Una relación *R* sobre un conjunto *X* es antisimétrica si, para todo $y \neq x$, xRy excluye a yRx. En otras palabras, si se alcanzan xRy e yRx, entonces $x = y$. Por consiguiente

R es antisimétrica ≡

$$\forall x \forall y\ (xRy \ \&\ yRx \Rightarrow y=x)$$

Simétrica			Antisimétrica			Ninguna		
1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1

P. ejem. La relación "madre de" es antisimétrica porque si *x* es madre de *y*, excluye a *y* es madre de *x*.

- En el grafo de una relación antisimétrica, ningún arco tiene un compañero en dirección opuesta

Relaciones Transitivas

Una relación R sobre un conjunto X es transitiva si, para todo x, y, z en X, siempre que xRy e yRz, entonces xRz. Esto es

$$R \text{ es transitiva} \equiv$$

$$\forall\ x\ \forall\ y \forall\ z\ (xRy\ \&\ yRz \Rightarrow xRz)$$

- Una relación es transitiva si y sólo si **todos** los pares de objetos que pueden ser alcanzados a través de un intermediario pueden **también** ser alcanzados directamente.

P. ejem. La relación $<$ es transitiva

Cerradura

El cierre reflexivo $R^{(r)}$ de una relación R es la relación reflexiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.

$$R^{(r)} = R \cup I_A$$

donde:

I_A : Relación identidad

R : Cualquier relación (no necesariamente reflexiva)

La relación identidad es aquella que contiene todos los (x,x) con $x \in B$

En pocas palabras, se añaden tan pocos elementos (tuplas) como sea posible para convertir R en reflexiva.

El cierre simétrico $R^{(s)}$ de una relación R es la relación simétrica más pequeña que contiene a R como subconjunto.

$$R^{(s)} = R \cup R^{\sim}$$

donde:
$R^{\sim}$: Relación inversa
R : Cualquier relación (no necesariamente simétrica)

En pocas palabras, se añaden tan pocos elementos (tuplas) como sea posible para convertir R en simétrica.

Relaciones Inversas

Si $R: X \leftrightarrow Y$ entonces la relación inversa

$R^{\sim}: X \leftrightarrow Y$ se define como

$$\{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

Por consiguiente $xRy \equiv yR^{\sim}x$

El cierre transitivo R^+ de una relación R es la relación transitiva más pequeña que contiene a R como subconjunto.

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^m$$

Relaciones de Equivalencia

Una relación R es una relación de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

P. ejem.

La relación de equivalencia más importante es la relación de igualdad.

Tipo de relación	***Porque ...***
Reflexiva	x=x para todo x
Simétrica	x=y e y=x
Transitiva	x=y e y=z, x=z

Órdenes Parciales

Una relación *R:S↔S* se denomina un *orden parcial débil* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

R se denomina un *orden parcial estricto* si es no reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Conjunto parcialmente ordenado

Un conjunto *A* junto con un orden parcial R se denomina *conjunto parcialmente ordenado* o un *cpo*. El *cpo(A, R)* es el conjunto *A* junto con el orden parcial *R*.

Orden parcial fuerte

El *orden parcial fuerte* asociado con (A,R) se denota por R_1, donde $R_1=R-I_A$ donde I_A es la relación identidad.

Diagramas de Hasse

Sea *(A,R)* un cpo. *El diagrama de Hasse* del cpo (A,R) es el grafo de la reducción transitiva de R_1. En este grafo, existe un arco desde *x* a *y* si y sólo si *x* comprende directamente a *y*.

Ejemplo:
Diagrama de Hasse que muestra la relación subconjunto sobre el conjunto potencia de A={a, b, c}